§ 5. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСЕЙ, ПРОХОДЯЩИХ ЧЕРЕЗ ЗАДАННУЮ ТОЧКУ

В заданной точке O выберем декартову систему осей координат $Oxyz$. Ось Ol образует с осями координат углы α, β, γ (рис. 30). По определению момента инерции относительно оси Ol имеем

$$J_l=\sum_{k=1}^{N} m_k d_k^2, \qquad (20)$$

или для сплошных тел

$$J_l=\int d^2 \mathrm{d}m.$$

В дальнейшем используется определение (20). Сплошные тела считаются разбитыми на N малых частей, принимаемых за точки.

Из прямоугольного треугольника OA_kM_k получаем

$$d_k^2=r_k^2-(OA_k)^2, \qquad (21)$$

где $r_k^2=x_k^2+y_k^2+z_k^2$, x_k, y_k, z_k — координаты точки M_k. Отрезок OA_k является проекцией радиуса-вектора $\bar{r}_k=x_k\bar{i}+y_k\bar{j}+z_k\bar{k}$ на ось Ol. Для получения проекции вектора $\bar{r}_k$ на ось Ol его следует умножить скалярно на единичный вектор этой оси $\bar{l}^0=\bar{i}\cos\alpha+\bar{j}\cos\beta+\bar{k}\cos\gamma$. Имеем

$$OA_k=\bar{r}_k\cdot\bar{l}^0=(x_k\bar{i}+y_k\bar{j}+z_k\bar{k})(\bar{i}\cos\alpha+\bar{j}\cos\beta+\bar{k}\cos\gamma)=$$
$$=x_k\cos\alpha+y_k\cos\beta+z_k\cos\gamma. \qquad (22)$$

Умножая в (21) r_k^2, выраженный через координаты точки M_k, на единицу в виде $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ и используя значение (22) для OA_k, получим

$$d_k^2=(x_k^2+y_k^2+z_k^2)(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)-$$
$$-(x_k\cos\alpha+y_k\cos\beta+z_k\cos\gamma)^2=(y_k^2+z_k^2)\cos^2\alpha+(z_k^2+x_k^2)\cos^2\beta+$$
$$+(x_k^2+y_k^2)\cos^2\gamma-2y_kz_k\cos\beta\cos\gamma-2z_kx_k\cos\gamma\cos\alpha-$$
$$-2x_ky_k\cos\alpha\cos\beta. \qquad (23)$$

Подставляя (23) в (20) и вынося косинусы углов за знаки сумм, имеем

$$J_l=\cos^2\alpha\sum_{k=1}^{N} m_k(y_k^2+z_k^2)+\cos^2\beta\sum_{k=1}^{N} m_k(z_k^2+x_k^2)+$$
$$+\cos^2\gamma\sum_{k=1}^{N} m_k(x_k^2+y_k^2)-2\cos\beta\cos\gamma\sum_{k=1}^{N} m_ky_kz_k-$$
$$-2\cos\gamma\cos\alpha\sum_{k=1}^{N} m_kz_kx_k-2\cos\alpha\cos\beta\sum_{k=1}^{N} m_kx_ky_k.$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{N} m_k(y_k^2+z_k^2)=J_x;\quad \sum_{k=1}^{N} m_k(z_k^2+x_k^2)=J_y;\quad \sum_{k=1}^{N} m_k(x_k^2+y_k^2)=J_z$$

— моменты инерции относительно осей координат, а

$$\sum_{k=1}^{N} m_ky_kz_k=J_{yz};\quad \sum_{k=1}^{N} m_kz_kx_k=J_{zx};\quad \sum_{k=1}^{N} m_kx_ky_k=J_{xy}$$

— центробежные моменты инерции относительно тех же осей, получим

$$J_l=J_x\cos^2\alpha+J_y\cos^2\beta+J_z\cos^2\gamma-2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma-$$
$$-2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha-2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta. \qquad (24)$$

Для определения момента инерции J_l кроме углов α, β, γ, определяющих направление оси, необходимо знать в точке O шесть моментов инерции: J_x, J_y, J_z, J_{yz}, J_{zx}, J_{xy}. Их удобно расположить как элементы единой таблицы или матрицы:

$$(J)=\begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix}. \qquad (25)$$

Матрица, или таблица (25), составленная из осевых и центробежных моментов инерции относительно декартовых осей координат, называется *тензором инерции* в точке O. В тензоре инерции условились центробежные моменты инерции брать со знаком минус. Компоненты тензора инерции (отдельные осевые или центробежные моменты инерции) зависят не только от выбора точки, но и от ориентации осей координат в этой точке.

Для определения момента инерции относительно какой-либо оси, проходящей через заданную точку, для рассматриваемого тела необходимо иметь тензор инерции в этой точке и углы, определяющие направление оси с осями координат.

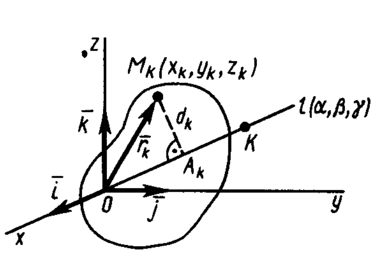

Рис. 30